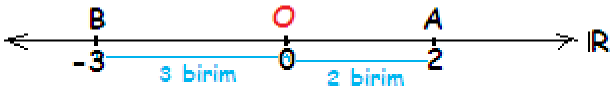
KUTUPSAL KOORDİNATLAR

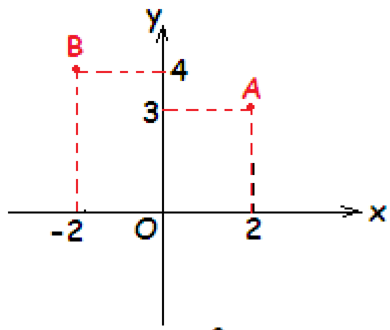
Geometride, bir noktanın konumunu belirtmek için değişik yöntemler uygulanır. Örnek olarak çok kullanılan Kartezyen (Dik) Koordinat sistemini anımsatarak çalışmamıza başlayalım.

Doğru üzerindeki bir noktanın yerini belirtmek için bir gerçek sayı yeterlidir.



Sayı ekseni üzerindeki A noktasına karşı gelen 2 sayısı, A nın başlangıç noktası O dan 2 birim uzaklıkta olduğunu, B noktasına karşı gelen -3 sayısı, B nin başlangıç noktası O dan (diğer tarafında) 3 birim uzaklıkta olduğunu gösterir.
A(2), B(-3) olarak gösterilir.

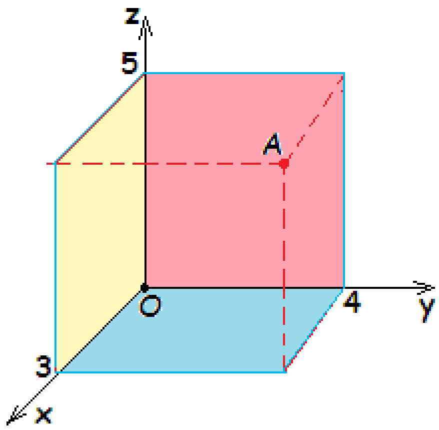
Düzlemdeki bir noktanın yerini belirtmek için bir gerçek sayı ikilisi gerekir.



$R \times R = R^2$

Düzlemde (R^2 de) A noktasına karşı gelen (2,3) gerçek sayı ikilisi, A nın x ekseninden 3, y ekseninden 2 birim uzakta olduğunu, B noktasına karşı gelen (-2,4) gerçek sayı ikilisi, B nin x ekseninden 4, y ekseninden (diğer tarafında) 2 birim uzaklıkta olduğunu gösterir.
A(2,3) ve B(-2,4) olarak gösterilir.

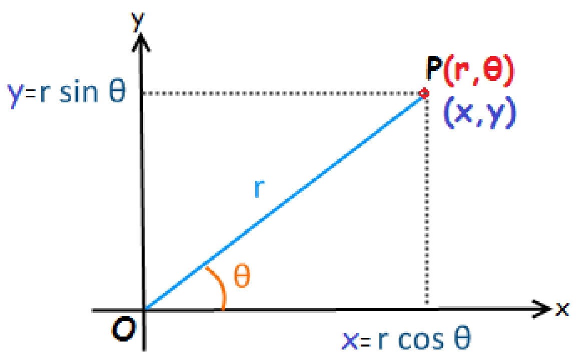
Uzayda bir noktanın yerini belirtmek için bir gerçek sayı üçlüsü gerekir.

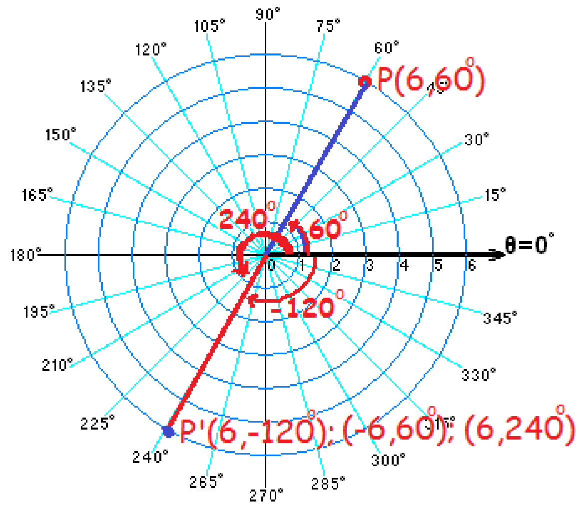


Uzayda (R^3 de) A noktasına karşı gelen (3,4,5) sıralı üçlüsü, A nın y0z düzleminden 3, x0z düzleminden 4, x0y düzleminden 5 birim uzaklıkta olduğunu gösterir.
A(3,4,5) olarak gösterilir.

A noktasına karşı gelen sayı (sayılar), noktanın koordinatlarıdır.

Düzlemdeki bir noktanın konumunu dik iki doğrudan uzaklıkları türünden belirtmek yerine; verilen bir noktadan uzaklığı ve bu noktadan geçen bir doğruya göre yönü türünden göstermek kimi zaman daha kullanışlı olmaktadır. Bu sistemdeki noktaların koordinatlarına Kutupsal Koordinatlar denir.





P noktasının Kutupsal koordinatları, OP uzaklığı **r** ve AOP yönlü açısının ölçüsü de θ olmak üzere **(r, θ)** olarak yazılır.

UYARI: P' noktası Dik koordinat sisteminde (-3, $-3\sqrt{3}$) ikilisi ile gösterilebilirken, Kutupsal koordinatlarla (6, -120°);(-6, 60°) veya (6,240°) ikileri ile gösterilebilir.

- P noktasının Dik koordinat sisteminde koordinatları (x, y) ise;

x = r. cos θ , y = r. sin θ r = $\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = arctan\frac{y}{x}$ dir.

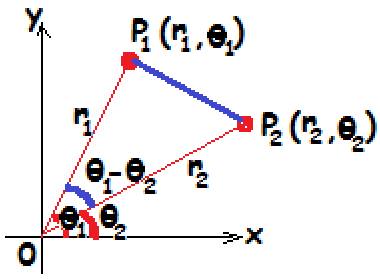
ÖRNEK:

r=4.sin θ Kutupsal denklemi ile verilen eğrinin Dik koordinat sistemindeki denklemi;
r = $\sqrt{x^2+y^2}$ ve y = r. sin θ , sin θ = $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ eşitlikleri kullanıldığında
$x^2+y^2=4y$ ve düzenlendiğinde de $x^2+(y-2)^2=4$ bulunur.

- Kutupsal Koordinatlarla verilen bir eğri denkleminde;

θ yerine $-\theta$ yazıldığında denklem değişmiyorsa; Eğri 0x eksenine göre simetriktir.
θ yerine $\pi - \theta$ yazıldığında denklem değişmiyorsa; Eğri 0y eksenine göre simetriktir.
r yerine -r, ya da θ yerine $-\theta$ yazıldığında denklem değişmiyorsa; Eğri O başlangıç noktasına göre simetriktir.

- $P_1(r_1, \theta_1)$ ve $P_2(r_2, \theta_2)$ Kutupsal koordinatları ile verilen P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzaklık; (P_1OP_2 üçgeninde kosinüs teoreminden)



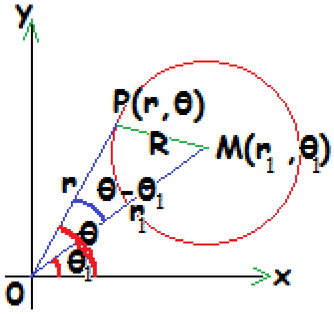
$|P_1P_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

ÖRNEK:

A(6,15^0) ve B(8,75^0) Kutupsal koordinatları ilen verilen A ve B noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

$|AB| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)} = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2.6.8.\cos(75^0 - 15^0)} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ br.

- Merkezi $M(r_1, \theta_1)$ olan R yarıçaplı çemberin denklemi; (Çember üzerindeki herhangi bir noktayı $P(r, \theta)$ olarak alıp, MOP üçgeninde kosinüs teoreminden)



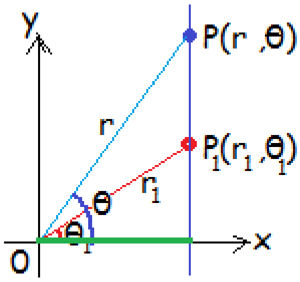
$r^2-2r_1r.\cos(\theta-\theta_1)+r_1^2=R^2$

ÖRNEK:

Merkezi $M(4,30^0)$ ve yarıçapı 5 birim olan çemberin denklemini yazınız.
$r^2-2r_1r.\cos(\theta-\theta_1)+r_1^2=R^2$ de; $r_1=4$, $\theta_1=30^0$ ve $R=5$ yazıldığında
$r^2-2.4.r.\cos(\theta-30^0)+4^2=5^2$ ve $r^2-8r.\cos(\theta-30^0)-9=0$ bulunur.

- $P_1(r_1, \theta_1)$ noktasından geçen ve 0x eksenine dik olan doğrunun denklemi;

(Doğru üzerindeki herhangi bir nokta $P(r, \theta)$ olsun.)

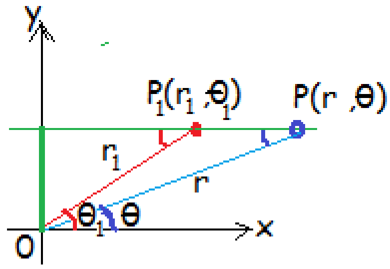


$r.\cos\theta = r_1.\cos\theta_1$

ÖRNEK:

$A(2,30^0)$ noktasından geçen ve 0x eksenine dik olan doğrunun denklemini yazınız?
$r.\cos\theta = r_1.\cos\theta_1$ de; $r_1=2$ ve $\theta_1=30^0$ yazıldığında
$r.\cos\theta = 2.\cos30^0 = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $r.\cos\theta = \sqrt{3}$ bulunur.

- $P_1(r_1, \theta_1)$ noktasından geçen ve 0x eksenine paralel olan doğrunun denklemi; (Doğru üzerindeki herhangi bir nokta $P(r, \theta)$ olsun.)



$r.\sin\theta = r_1.\sin\theta_1$

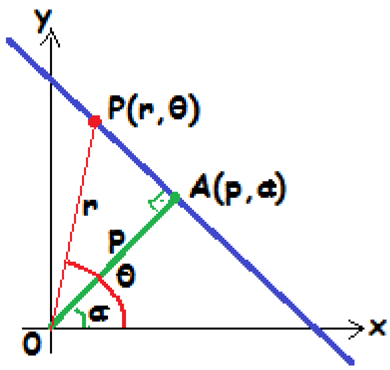
ÖRNEK:

$A(2,30^0)$ noktasından geçen ve 0x eksenine paralel olan doğrunun denklemini yazınız?

$r.\sin\theta = r_1.\sin\theta_1$ de; $r_1=2$ ve $\theta_1=30^0$ yazıldığında

$r.\sin\theta = 2.\sin30^0 = 2.\frac{1}{2} = 1$, $r.\sin\theta = 1$ bulunur.

- O başlangıç noktasından geçmeyen bir doğruya O dan çizilen dikme ayağı $A(p,\alpha)$ ise doğrunun denklemi; (Doğru üzerindeki herhangi bir nokta $P(r, \theta)$ olsun.)



$r.\cos(\theta - \alpha) = p$

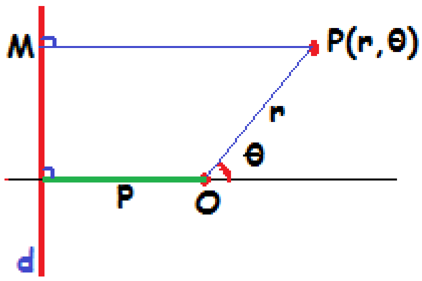
ÖRNEK:

$P(4,30^0)$ noktasından geçen ve 0x ekseni ile 150^0 lik açı yapan doğrunun denklemi ?

$OA \perp d$ çizildiğinde ; $\alpha=60^0$ ve $|OA|=p=4.\sin(180^0-150^0+30^0)=4.\sin60^0=4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$r.\cos(\theta - \alpha) = p$ de yerine yazıldığında; $r.\cos(\theta - 60^0) = 2\sqrt{3}$ bulunur.

- Odağı O (başlangıç noktası), dışmerkezliği $e = \frac{|PO|}{|PM|}$ ve odağın doğrultmandan uzaklığı p olan koniğin denklemi; (Konik üzerindeki herhangi bir nokta P(r, θ) olsun.)



|PM|=p +r.cos θ ve $e = \frac{|PO|}{|PM|}$ olduğundan;

$$r = \frac{ep}{1 - e.cos\theta}$$

ÖRNEK:

$r = \frac{12}{4-3.cos\Theta}$ denklemi ile verilen koniğin türünü belirleyiniz.

$r = \frac{12}{4-3.cos\Theta} = \frac{3}{1-\frac{3}{4}.cos\Theta}$ $e = \frac{3}{4} < 1$ Konik ELİPS

e.p=3 , $\frac{3}{4}.p = 3$, p=4 olduğundan doğrultman doğrusu O'nun 4 birim solundadır.

EK BİLGİ:

Eğri uzunluğu;

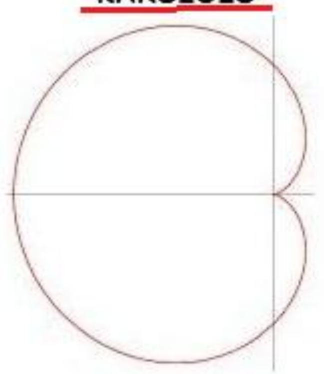
$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Kapalı bölgenin alanı:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\, d\theta.$$

KUTUPSAL KOORDİNATLARLA VERİLEN İLGİNÇ EĞRİ ÖRNEKLERİ:

KARDİOİD

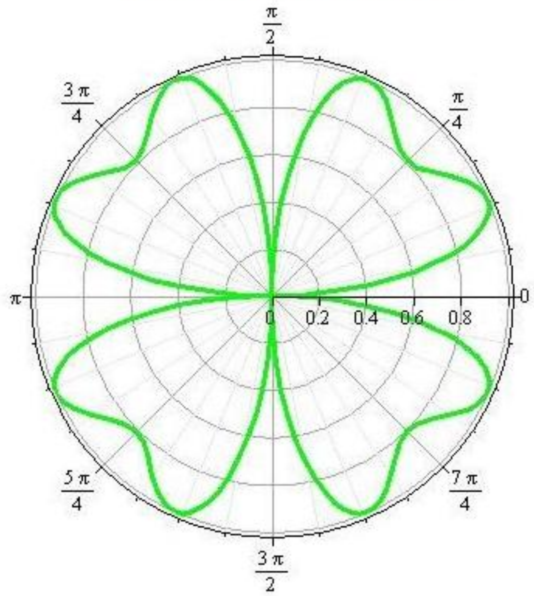


$$r = a\,(1 - \cos\theta),$$

$$x = a\cos t\,(1 - \cos t)$$
$$y = a\sin t\,(1 - \cos t).$$

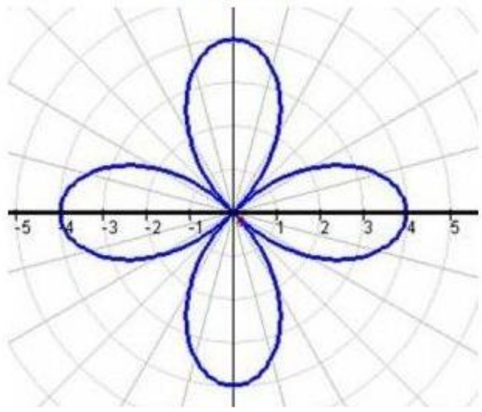
$$L = 8\,a$$
$$A = \frac{3}{2}\,\pi\,a^2.$$

DÖRT YAPRAKLI YONCA

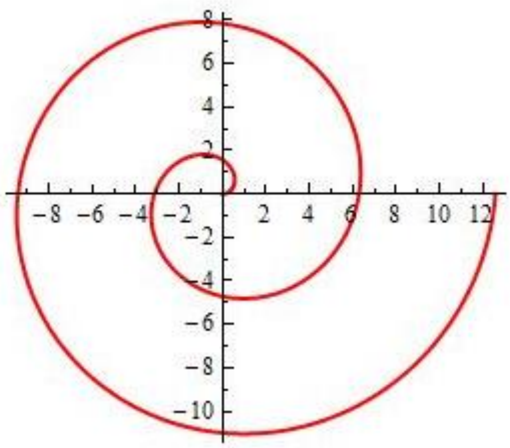


r=sin(2Ø) + 0.25Sin(6Ø)

r =4.cos2θ



$r = \theta \qquad (0 \leq \theta \leq 4\pi)$



http://ahmetelmas.wordpress.com